Neurčitý integrál 2. (Najděte primitivní funkce na maximálních otevřených intervalech)

1. Ještě několik příkladů integrace „substituce + per partes":

$$\int \frac{1}{x^3}\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)dx\,;\quad \int \frac{1}{x^2}\,arctg\left(\frac{1}{x}\right)dx\,;\quad \int e^{\sqrt{x}}\,dx\,;\quad \int arctg\sqrt{x}\,dx\,;\quad \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx\,;\quad \int \arcsin^2 x\,dx\,.$$

2. Integrál z racionální funkce:

a) integrace parciálních (jednoduchých) zlomků:

$$\int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx\,;\quad \int \frac{1}{2-x}\,dx\,;\quad \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx\,;\quad \int \frac{x-2}{x^2+4x+5}\,dx\,;\quad \int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,dx\,;$$

b) integrace racionálních funkcí:

$$\int \frac{2x-11}{x^2+3x-10}\,dx\,;\quad \int \frac{3x+9}{(x^2-1)(x+2)}\,dx\,;\quad (*)\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-3x-2}\,dx\,;$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx\,;\quad \int \frac{5x^2+2x+3}{x^3+x^2-2}\,dx\,;\quad \int \frac{x^3+x^2-2x-10}{x^3+4x^2+5x}\,dx\,.$$

3. <u>Integrály funkcí, které pomocí vhodných substitucí vedou na integraci racionálních funkcí:</u>

a) $\int R(e^x)\,dx$ - substituce $e^x = t$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx\,;\quad \int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx\,;\quad \int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,dx\,;\quad \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx\,;\quad \int \frac{3e^x+5}{e^{2x}+4e^x+5}\,dx$$

$$(*)\int \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx$$

b) $\int R(\ln x)\frac{1}{x}dx$ - substituce $\ln x = t$:

$$\int \frac{\ln x}{x\cdot(1+\ln^2 x)}\,dx\,;\quad \int \frac{\ln x}{x\cdot(\ln x-1)(\ln^2 x-2\ln x+2)}\,dx\,;$$

c) $\int R(x,\sqrt{x})\,dx$, substituce $\sqrt{x}=t$:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\,;\quad \int \frac{\sqrt{x}-1}{x\cdot(x-2\sqrt{x}+2)}\,dx\,;\quad \int \frac{1}{(\sqrt{x}+2)\cdot(x+6\sqrt{x}+10)}\,dx\,;$$

a obecně (nepovinné s (*)) $\int R\left(x,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $s\in N, ad-bc\neq 0$ - substituce $\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\,;\quad \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx\,;\quad \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx\,.$$

d) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$:

(i) substituce $\sin x = t$ nebo $\cos x = t$:

„lehké“ příklady:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx \;;\; \int \frac{\sin x}{2+\cos x}\, dx \;;\; \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx \;;\;;\;;$$

a „těžší“ (*):

$$\int \sin^5 x\, dx \;;\; \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx \;;\; \int \frac{1}{\sin x}\, dx \;;\; \int \frac{1}{\cos^3 x}\, dx \;;\; \int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\, dx \;;$$

(ii) substituce $tg\, x = t$:

$$\int \frac{1}{1+tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \;;\; \int \frac{1}{1+tgx} dx \;;$$

a (*)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx \;;\; \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \;;\; \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx \;;$$

(iii) substituce $tg\frac{x}{2} = t$ - nepovinné příklady (*):

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\, dx \;;\; \int \frac{1}{5+4\sin x}\, dx \;;\; \int \frac{2+\sin x}{2-\sin x}\, dx \;.$$